ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ, СВЯЗЫВАЮЩИМИ ЗНАЧЕНИЯ ИСКОМОЙ ФУНКЦИИ НА ХАРАКТЕРИСТИКАХ, ЛЕЖАЩИХ В РАЗНЫХ ПОЛУПЛОСКОСТЯХ

Абдукодиров Абдурашид Толибжонович
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и дифференциальный уравнения Ферганского государственного университета

https://doi.org/10.5281/zenodo.8074391

Annotatsiya*: Ushbu maqolada giperbolik tipdagi tenglama uchun turli yarim tekislikda joylashgan va turli xarakteristik chiziqlar oilasiga mansub ikkita xarakteristikalardagi noma'lum funksiyaning qiymatlarini bog`lovchi nolokal shartli chegaraviy masala tadqiq etilgan.*

Аннотация: *В данной статье исследуется нелокальная краевая задача для уравнения гиперболического типа, связывающая значения неизвестной функции в двух характеристических линиях, расположенных в разных полуплоскости и принадлежащих разным семействам характеристических линий.*

Abstract: *In this article, a nonlocal conditional boundary value problem with nonlocal condition connecting the values of the unknown function in two characteristic lines located in two half-plane and belonging to different families of characteristic lines for hyperbolic type equations has been studied.*

Kalit so`zlar: *nolokal shartli chegaraviy masala, giperbolik tipdagi tenglama, xarakteristik chiziqlar oilasi, Koshi masalasi.*

Ключевые слова: *нелокальная краевая задача, уравнение гиперболического типа, семейство характеристических линий, задача Коши.*

Key words: *nonlocal boundary value problem, equation of hyperbolic type, family of characteristic lines, Cauchy problem.*

С семидесятых годов прошлого столетия начато изучение краевых задач для уравнений, вырождающихся внутри области. В работе [1] для уравнения

$$|y|^m U_{xx} - U_{yy} = 0\ ,\ m > 0$$

в характеристическом четырехугольнике, одной из диагоналей является отрезок A(0,0) B(1,0) оси *x*, поставлен и исследован аналог задачи Гурса с краевыми данными на противоположных сторонах четырехугольника, а в [2] – задача с нелокальными условиями, связывающими значения искомой функции на характеристиках, лежащих в одной полуплоскости.

В работах [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10] аналогичные задачи изучены для уравнений

$$|y|^n U_{xx} - |y| U_{yy} - \alpha \cdot signy \cdot U_y + \lambda^2 |y|^n U = 0, \qquad (1)$$

в области D, ограниченной характеристиками

$$AC_1 : x - 2/(n+1)(-y)^{\frac{n+1}{2}} = 0, \qquad BC_1 : x + 2/(n+1)(-y)^{\frac{n+1}{2}} = 1,$$

$$AC_2 : x - 2/(n+1)y^{\frac{n+1}{2}} = 0, \qquad BC_2 : x + 2/(n+1)y^{\frac{n+1}{2}} = 1$$

уравнения (1), то есть в характеристическом четырехугольнике поставлена и исследована краевая задачи с нелокальными условиями, связывающими значения искомой функции на характеристиках, лежащих в одной и в различных полуплоскостях, для каждого значения параметра α, когда $\alpha=(1-n)/2$, $\alpha\in((1-n)/2,1)$, $\alpha\in(1,(3+n)/2]$.

Рассмотрим уравнение (1) при $\alpha=1$ в области D, т.е. рассмотрим уравнение

$$|y|^n U_{xx}-|y|U_{yy}-signy\cdot U_y+\lambda^2|y|^n U=0\ , \tag{2}$$

где $n>1$, $\lambda\in R$.

Для того чтобы найти общее решение уравнение (2) выполним замену $x=x$, $\sigma=\dfrac{2}{n+1}|y|^{\frac{n+1}{2}}$, тогда, пользуясь результатами работы [3], находим общее решения уравнения (2) в виде

$$U(x,y)=\int_0^1\frac{\Psi[x+\sigma(2z-1)]}{\sqrt{z(1-z)}}\bar I_{-\frac12}\left[2\sigma\lambda\sqrt{z(1-z)}\right]dz\ + \tag{3}$$

$$+\int_0^1\frac{\Phi[x+\sigma(2z-1)]}{\sqrt{z(1-z)}}\left[\bar I_{-\frac12}\left[2\sigma\lambda\sqrt{z(1-z)}\right]\ln\frac{\sigma z(1-z)}{2}-\sqrt{\pi}B_{-\frac12}\left[2\sigma\lambda\sqrt{z(1-z)}\right]\right]dz,$$

где Ψ,Φ – произвольные функции из класса C^2,

$$B_\gamma(z)=\frac{\psi(\gamma)}{0!\,\Gamma(1+\gamma)}+\frac{\psi(\gamma+1)}{1!\,\Gamma(2+\gamma)}\left(\frac{z}{2}\right)^2+\frac{\psi(\gamma+2)}{2!\,\Gamma(3+\gamma)}\left(\frac{z}{2}\right)^4+\ldots,$$

$$\psi\left(-\frac12+n\right)=2\left(1+\frac13+\frac15+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)-2\ln2,\quad \psi(-\frac12)=-2\ln2.$$

С помощью этой формулы, можно показать, что для любого нетривиального решения уравнения (2) при фиксированном значении $x=x_0$ либо $\lim\limits_{y\to0}U_y(x_0,y)=0$, либо $\lim\limits_{y\to0}U_y(x_0,y)=\infty$. Поэтому задача Коши с обычными начальными условиями на линии $y=0$ не имеет решения, когда заданная функция $\nu(x)=\lim\limits_{y\to0}U_y(x,y)\not\equiv0$ и непрерывна. Следовательно, задача Коши с обычными начальными условиями для уравнения (2) поставлена некорректно.

Для уравнения (2) корректно поставлена следующая

Задача1. Найти регулярное в области D_j (j=1 или j=2) решение уравнения (2), удовлетворяющее начальным условиям **:**

$$\lim_{y\to0}\frac{U(x,y)}{\ln|y|^{\frac{n+1}{2}}}=\tau(x),\quad 0\le x\le1;$$

$$\lim_{y\to 0}|y|\ln^2|y|^{\frac{n+1}{2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{U(x,y)-\omega(x,y)}{\ln|y|^{\frac{n+1}{2}}}\right)=\nu(x),\quad 0<x<1, \qquad (5)$$

где

$$\omega(x,y)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\tau[x+\sigma(2z-1)]}{\sqrt{z(1-z)}}\left[\bar{I}_{-\frac{1}{2}}\left[2\sigma\lambda\sqrt{z(1-z)}\right]\ln\frac{\sigma z(1-z)}{2}-\sqrt{\pi}B_{-\frac{1}{2}}(2\sigma\lambda\sqrt{z(1-z)})\right]dz,$$

$\tau(x),\nu(x)$ – заданные функции.

С помощью общего решения (3) уравнение (2) и условий (5), нетрудно убедиться, что единственное решение задачи1 определяется формулой:

$$U(x,y)=(-1)^j\frac{2}{\pi(n+1)}\int_0^1\frac{\nu[x+\sigma(2z-1)]}{\sqrt{z(1-z)}}\bar{I}_{-\frac{1}{2}}\left[2\sigma\lambda\sqrt{z(1-z)}\right]dz+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\tau[x+\sigma(2z-1)]}{\sqrt{z(1-z)}}\left[\bar{I}_{-\frac{1}{2}}\left[2\sigma\lambda\sqrt{z(1-z)}\right]\ln\frac{\sigma z(1-z)}{2}-\sqrt{\pi}B_{-\frac{1}{2}}\left[2\sigma\lambda\sqrt{z(1-z)}\right]\right]dz. \qquad (6)$$

$\overline{I}_k(x)=\Gamma(1-\beta)(x/2)^{-k}I_k(x)$, а $I_k(x)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка k.

Непосредственной проверкой легко показать, что, если $\tau(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$, а $\nu(x)\in C^2(0,1)$ (она может обращаться в бесконечность порядка меньше $\frac{1}{2}$ при $x\to 0$ и $x\to 1$), то функция $U(x,y)$,определяемая формулой (6) , обладает следующими свойствами

$$U(x,y)\in C^2(D_j),\quad \frac{U(x,y)}{\ln|y|^{\frac{n+1}{2}}}\in C(\overline{D}_j),$$

$$|y|\ln^2|y|^{\frac{n+1}{2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{U(x,y)-\omega(x,y)}{\ln|y|^{\frac{n+1}{2}}}\right)\in C(D_j\cup AB) \qquad (7)$$

и в области D_j (j=1 или j=2) удовлетворяет уравнению (2) и краевым условиям (5).

Пользуясь формулой (6) можно доказать существование единственного решения следующей нелокальной краевой задачи для уравнения (2) в области *D*.

Задача Γ_1. Найти в области *D* функцию $U(x,y)$ со следующими свойствами:

1) обладает свойствами (7) и в областях D_j, j=1,2 удовлетворяет уравнению (2);

2) на отрезке АВ выполняются условия сопряжения

$$\lim_{y\to -0}\frac{U(x,y)}{\ln(-y)^{\frac{n+1}{2}}}=\lim_{y\to +0}\frac{U(x,y)}{\ln y^{\frac{n+1}{2}}}\quad,\quad 0\le x\le 1;$$

$$\lim_{y\to -0}(-y)\left(\ln^2(-y)^{\frac{n+1}{2}}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{U(x,y)-\omega(x,y)}{\ln(-y)^{\frac{n+1}{2}}}\right]=$$

$$=\lim_{y\to +0}y\left(\ln^2 y^{\frac{n+1}{2}}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{U(x,y)-\omega(x,y)}{\ln y^{\frac{n+1}{2}}}\right]\quad,\quad 0<x<1; \tag{8}$$

3) удовлетворяет краевым условиям

$$a_1(x)\,A_{0x}^{1,\lambda}\left\{D_{ox}^{1/2}[U(\theta_{01})-\omega(\theta_{01})]\right\}+b_1(x)\,A_{1x}^{1,\lambda}\left\{D_{1x}^{1/2}[U(\theta_{12})-\omega(\theta_{12})]\right\}=$$
$$=d_1(x)+c_1(x)\lim_{|y|\to 0}\frac{U(x,y)}{\ln|y|^{\frac{n+1}{2}}}\ ,0\le x\le 1,$$

$$a_2(x)\,A_{0x}^{1,\lambda}\left\{D_{ox}^{1/2}[U(\theta_{02})-\omega(\theta_{02})]\right\}+b_2(x)\,A_{1x}^{1,\lambda}\left\{D_{1x}^{1/2}[U(\theta_{11})-\omega(\theta_{11})]\right\}=$$
$$=d_2(x)+c_2(x)\lim_{|y|\to 0}\frac{U(x,y)}{\ln|y|^{\frac{n+1}{2}}}\ ,\ \ 0\le x\le 1, \tag{9}$$

где $a_j(x),b_j(x),d_j(x),c_j(x),$ – заданные функции из класса $C[0,1]\cap C^2(0,1)$, причем $c_j(x)\left(a_j^{\,2}(x)+b_j^{\,2}(x)\right)\ne 0$, $j=1,2$ и

$$A_{mx}^{n,\lambda}[f(x)]=f(x)-\int_m^x f(t)\left(\frac{t-m}{x-m}\right)^n\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[\lambda\sqrt{(x-m)(x-t)}\ \right]dt,$$

$$D_{kx}^{\alpha}g(x)\equiv\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_k^x|x-t|^{-\alpha}\,g(t)dt,\ \ 0<x<1,$$

$J_s(x)$ – функция Бесселя первого рода порядка *s*.

Решение задачи Γ_1 в областях D_j (j=1,2) ищем в виде (6), где $\tau(x)$ и $\nu(x)$– неизвестные функции, которые подлежат определению.

Подставляя (6) в (9) и учитывая (8), после некоторых вычислений, находим функциональные соотношения между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на AB, принесенные из D_j, *j*=1,2:

$$(-1)^j P_j(x)\nu(x)=q\sqrt{x(1-x)}\left[d_j(x)+c_j(x)\tau(x)\ \right],\quad 0<x<1, \tag{10}$$

где $P_j(x)=a_j(x)\sqrt{1-x}-b_j(x)\sqrt{x},\ q=\dfrac{\sqrt{\pi}(n+1)}{2}.$

Справедлива следующая

Теорема. Если выполнено условие

$$P_1(x)c_2(x)+P_2(x)c_1(x)\ne 0,\quad 0\le x\le 1; \tag{11}$$

то, существует единственное решение задачи Γ_1.

Доказательство. (10) является системой линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными функциями. В силу условия (11) её основной детерминант отличен от нуля. По этому она имеет единственное решение:

$$\tau(x) = -\frac{d_1(x)P_2(x) + d_2(x)P_1(x)}{c_1(x)P_2(x) + c_2(x)P_1(x)}, \nu(x) = q\sqrt{x(1-x)}\frac{c_1(x)d_2(x) + c_2(x)d_1(x)}{c_1(x)P_2(x) + c_2(x)P_1(x)}.$$

Литература

1. Кумыкова С.К. Краевая задача со смещением для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения. // Дифференциальные уравнения . -1980.-Т. 16. №1 - С. 93-104.
2. Кумыкова С.К., Нахушева Ф.Б. Об одной краевой задаче для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области. // Дифференциальные уравнения .-1978.-Т. 14. №1 - С. 50-65.
3. Капилевич М.Б. Об одном уравнении смешанного эллиптико-гиперболического типа.//Математический сборник.-1952.-Т.30 (72).№1.-С.11-38.
4. Абдукодиров А.Т. Об одной краевой задаче со смещением для уравнения гиперболического типа, вырождающегося внутри области.//Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики: Труды международной научной конф. 16-19 ноября 2004.-Ташкент,2004.-С. 17-21.
5. Уринов А.К., Абдукодиров А.Т. О единственности решения краевой задачи для уравнения гиперболического типа, вырождающегося внутри области.// Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики: Труды международной научной конф. 16-19 ноября 2004.-Ташкент, 2004.-С. 172-175.
6. Абдукодиров А.Т. Нелокальная краевая задача со смещением для уравнения гиперболического типа, вырождающегося внутри области.// Республиканская науч. конферен. молодых ученых: Ташкент, 2004.-С.65-68.
7. Абдукодиров А.Т. Задача с нелокальным краевым условием на характеристиках, лежащих в различных полуплоскостях, для уравнения гиперболического типа, вырождающегося внутри области.//Современные проблемы математической физики и информационных технологий: Труды международной научной конф. 18-24 апреля 2005.-Ташкент, 2005.-С. 230-234.
8. Уринов А.К., Абдукодиров А.Т. Об одной нелокальной краевой задаче со смещением для уравнения гиперболического типа, вырождающегося внутри области.//Доклады Адыгской (Черкесской) международной академии наук, Нальчик.- 2005.- Том 7. -№ 2.-С.68-73.
9. Уринов А.К., Абдукодиров А.Т. Нелокальная краевая задача со смеще-нием для одного вырождающегося гиперболического уравне-ния.//Узбекский математический журнал. Ташкент.- 2005.- № 4.- С. 102-110.
10. Абдукодиров А.Т. Единственность решения одной краевой задачи со смещением для уравнения гиперболического типа, вырождающегося внутри области.// Доклады Академии наук Республики Узбекистан. Ташкент.- 2005.- № 4.- С. 9-12.